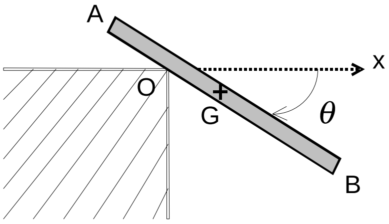
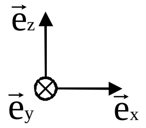
-EXERCICE 17.5-

• ENONCE :

« Glissement d'une règle sur l'arête d'une table »





Une règle AB, de centre d'inertie G, a une masse m et une longueur 2L.
Elle est placée sur une table horizontale.

Initialement: $\overrightarrow{OG} = a\vec{e}_x$, avec: $0 \prec a \prec l$

Le coefficient de frottement règle-table est constant et vaut f.

On donne le moment d'inertie de la règle par rapport à l'axe Gy : $J = \dfrac{mL^2}{3}$

• A t=0, on lâche la règle sans vitesse initiale ; après avoir justifié le fait qu'il ne peut y avoir de glissement à $t = 0^+$, déterminer l'angle θ_0 à partir duquel apparaît le glissement.

Commenter l'expression obtenue.

• CORRIGE :

« Glissement d'une règle sur l'arête d'une table »

1) **Analyse du problème :**

• Soit I le point « gravé » sur la règle et coïncidant avec O pour t ≤ 0 ; on a :

$\vec{v}_{O\in table}(0^-) = \vec{v}_{I\in règle}(0^-) = \vec{0}$; or : $\vec{v}_{O\in table}(0^+) = \vec{0}$ ⇒ pour qu'il y ait glissement en 0^+, il faudrait que : $\vec{v}_{I\in règle}(0^+) \neq \vec{0}$, ce qui est contraire au fait que la vitesse est une grandeur continue (toute grandeur intervenant dans une forme d'énergie doit être continue, car faire varier l'énergie de façon discontinue nécessiterait une puissance infinie ; cette dernière remarque est à tempérer par la notion de quasi-continuité en fonction de l'échelle d'observation…).

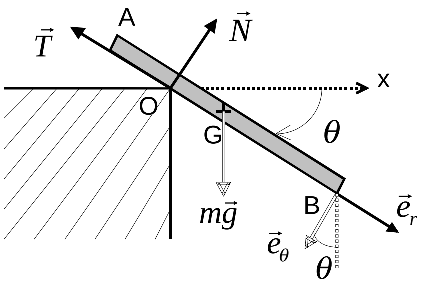
Le début du mouvement se fait donc **sans glissement** ⇒ la règle amorce un mouvement de **rotation pure** autour de l'axe fixe Oy.

• Le problème est à un degré de liberté, mais la question n'est pas ici de déterminer l'équation du mouvement dans cette phase : il s'agit d'exprimer les composantes $\vec{T}$ et $\vec{N}$ de la réaction de la table sur la règle en fonction de l'angle θ, puis de se placer à la limite du glissement (en $\theta = \theta_0$), où l'on aura : $\|\vec{T}\| = f \times \|\vec{N}\|$.

• Logiquement (pour pouvoir projeter simplement les forces ci-dessus), nous choisirons une base **cylindrique** liée à la règle : sur cette base, l'accélération fait intervenir les dérivées $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$; nous les déterminerons en fonction de θ grâce au TMC (barycentrique) ou au **TEC**, que nous préférerons : en effet, il est plus facile de dériver $\dot{\theta}$ pour obtenir $\ddot{\theta}$ que l'inverse.

Enfin, le mouvement se faisant sans glissement, la seule force qui « travaille » est le poids, qui dérive d'une énergie potentielle ⇒ nous utiliserons la **conservation de l'énergie mécanique**.

2) **Résolution du problème :**



Nous raisonnerons sur la figure ci-contre; le sens positif des rotations est le sens horaire (cohérent avec le sens + de l'axe Oy de l'énoncé).
En l'absence de vitesse initiale, le sens de la réaction tangentielle est sans ambiguïté: en cas de glissement, ce dernier se ferait dans le sens du vecteur radial, la réaction tangentielle est donc du sens contraire.

• ***Théorème de la résultante cinétique projeté sur la base polaire :***

sur $\vec{e}_r$: $-ma(\dot{\theta})^2 = -T + mg\cos\theta$ ($T \succ 0$, est le MODULE de $\vec{T}$)

sur $\vec{e}_\theta$: $ma\ddot{\theta} = -N + mg\cos\theta$ (1)

• ***Conservation de l'énergie cinétique :***

♦ Energie cinétique : appliquons le théorème de König à la règle ; il vient :

$$E_C = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J(\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\times\frac{mL^2}{3}\times(\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m(a^2 + \frac{L^2}{3})(\dot{\theta})^2$$

♦ <u>Energie potentielle</u> : l'origine sera prise pour une position horizontale de la règle :
$E_P = -mga\sin\theta$ (lorsque $\theta \nearrow$, $-\sin\theta \searrow \Rightarrow E_P \searrow$: logique, puisque G « descend »)

On a alors: $E_C + E_P = cste = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m(a^2+\frac{L^2}{3})(\dot{\theta})^2 - mga\sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{(\dot{\theta})^2 = \frac{2ag}{a^2+\frac{L^2}{3}}\sin\theta}$

Par dérivation temporelle, on obtient : $\boxed{\ddot{\theta} = \frac{ag}{a^2+\frac{L^2}{3}}\cos\theta}$

• En remplaçant $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ dans le système (1), on arrive à :
$T = \frac{L^2+9a^2}{L^2+3a^2}mg\sin\theta$ et: $N = \frac{L^2}{L^2+3a^2}\mathrm{mg}\cos\theta$ (on remarque que pour $\theta \in [0,\pi/2[$, $N \succ 0 \Rightarrow$ le contact en O ne cesse jamais). En se plaçant à la limite du glissement, et en faisant le rapport de T et de N, il vient enfin :

$$\frac{T}{N} = f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan\theta_0 = \frac{f}{1+\frac{9a^2}{L^2}}} \qquad (2)$$

Rq1 : si $f \to 0$ (absence de frottements), $\theta_0 \to 0$ (pas de force pour empêcher le glissement)

si $f \to \infty$, la règle est pratiquement « collée » à l'arête de la table $\Rightarrow \theta_0 \to \pi/2$

Rq2 : si $a/L \nearrow$, le « bras de levier » du moment du poids (lié à a) augmente (davantage que le moment d'inertie, lié à L), et l'accélération angulaire va augmenter (TMC), **diminuant** l'angle d'apparition du glissement, conformément à (2).